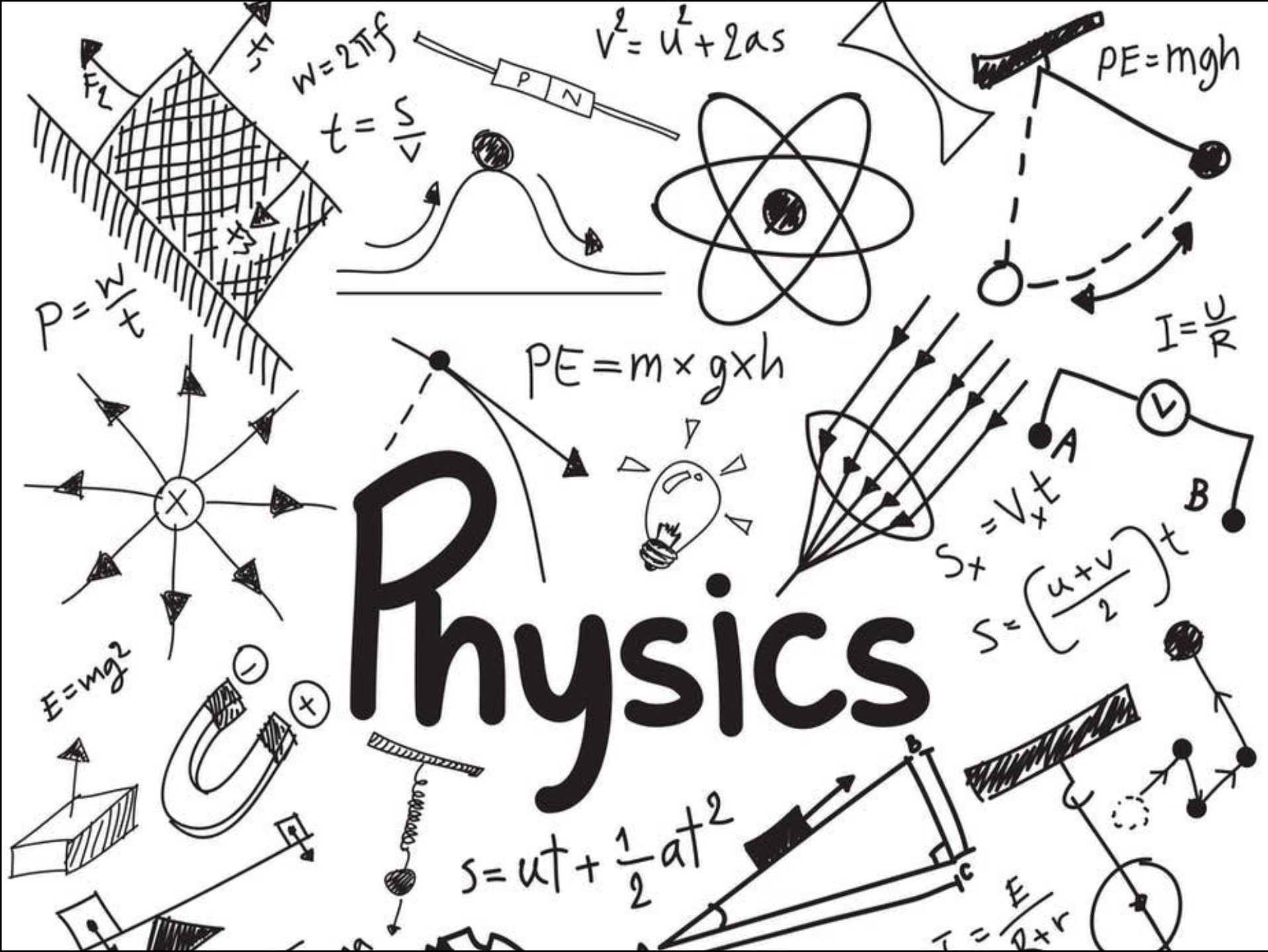


Physics



Reminder...

- Διαλέξεις
 - Προαιρετική παρουσία!
 - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
 - Δεν υπάρχουν απουσίες
- Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- COVID attention: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
- Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- Είδη ενέργειας
- Κινητική Ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} m u^2$$

- Σχετίζεται με την κίνηση ενός συστήματος (των μελών του)

- Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

$$U_g = m g y$$

- Σχετίζεται με την αλλαγή σχετικής θέσης (κατακόρυφη απομάκρυνση y) των μελών του συστήματος σε σχέση με τη Γη

- Ελαστική Δυναμική Ενέργεια

$$U_s = \frac{1}{2} k x^2$$

- Σχετίζεται με τη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας ενός συστήματος ελατηρίου-σώματος

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**
- Όταν σε ένα σύστημα ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, το συνολικό έργο που παράγεται από αυτές στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος

$$\Delta K = K_f - K_i = \sum W_{ext.forces}$$

Ενέργεια Συστήματος

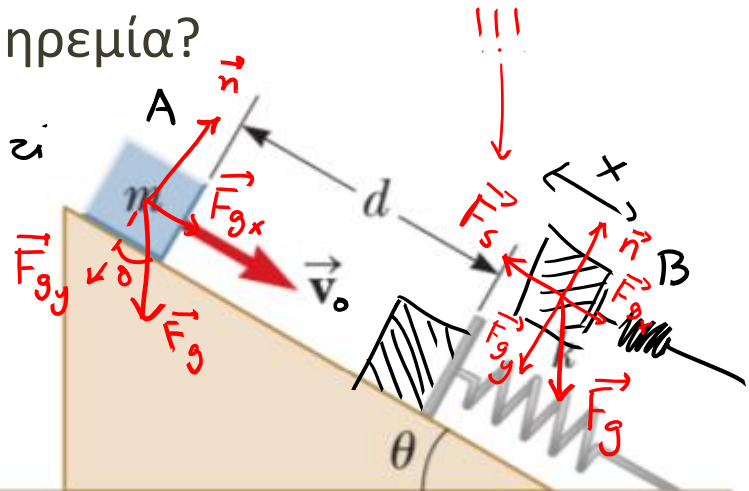
● Παράδειγμα:

- Κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0 . Πόσο έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?

Το σύστημα μας είναι μόνο το κουτί
μάζας m .

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο
σύστημα γίνονται στο σχήμα.

Εφαρμόσαμε ΘΜΚΕΕ από τη θέση Α ως τη θέση Β.



Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

Λρα ΘΜΚΕΕ_{A→B} :

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{\text{εξ. δυνάμειν}}$$

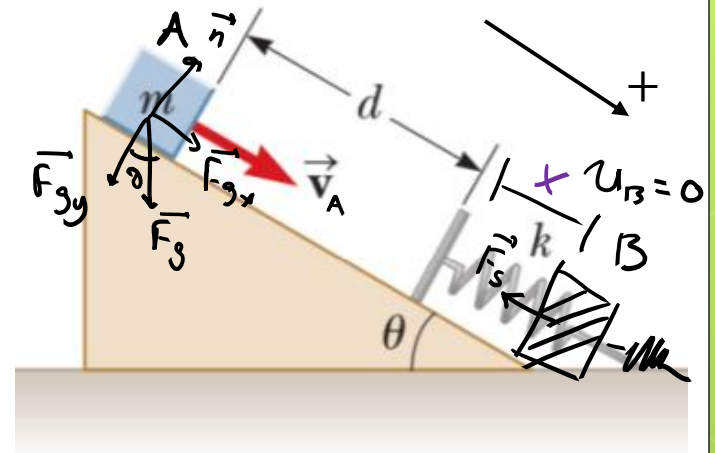
$$= \underbrace{W_{F_{gy}}^{A \rightarrow B}}_{\emptyset} + W_{F_{gx}}^{A \rightarrow B} + \underbrace{W_n^{A \rightarrow B}}_{\emptyset} + W_S^{A \rightarrow B} = W_{F_{gx}}^{A \rightarrow B} + W_S^{A \rightarrow B}$$

$$K_B - K_A = W_{F_{gx}}^{A \rightarrow B} + W_S^{A \rightarrow B} \Leftrightarrow \emptyset - \frac{1}{2} m u_A^2 = F_{gx} \cdot (d+x) \cdot \widetilde{\cos(\theta)}$$

$$-\frac{1}{2} m u_A^2 = mg \sin(\theta) \cdot (d+x) - \frac{1}{2} k x^2 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{+} \\ \text{+} \end{array} \right. \quad \left(\emptyset - \frac{1}{2} k x^2 \right)$$

$$-\frac{1}{2} m u_A^2 = mg \sin \theta \cdot d + mg \sin \theta \cdot x - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2} k x^2 - mg \sin \theta \cdot x - \left(\frac{1}{2} m u_A^2 + mg \sin \theta \cdot d \right) = \emptyset$$

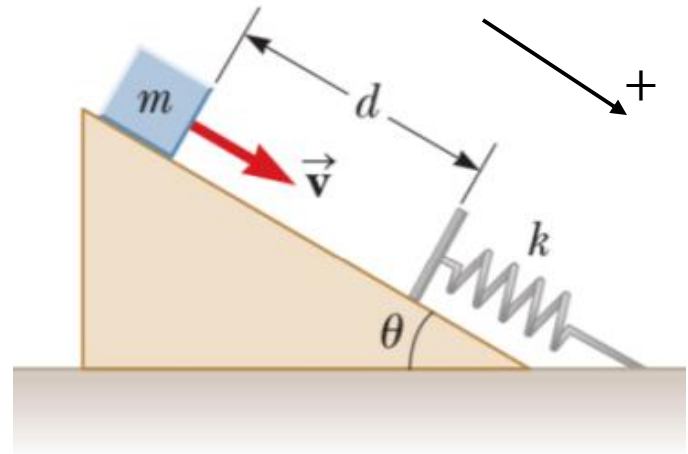


Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα – Λύση:

Λύνοντας το πολυώνυμο

(διαίρωντας με m το πολυώνυμο)



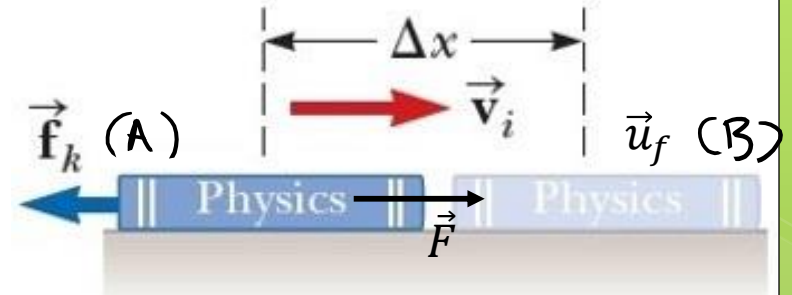
$$x = \frac{g \sin \theta \pm \sqrt{(g \sin \theta)^2 - 4 \frac{k}{2m} \left(-\frac{v_A^2}{2} - g \sin \theta \cdot d \right)}}{2 \frac{k}{2m}}$$

Κρατάμε τη θετική λύση, αφού η θετική φορά
της κίνησης ^{και της} είναι προς τη φορά κίνησης του σώματος.
Π.Ε.Τ.Ο.Σ.Ι.Κ.Η.Σ. $\vec{x}$

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε και μια ακόμη μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα

- Σύστημα == βιβλίο



- Σταθερή δύναμη $\vec{F}$
- Σταθερή επιτάχυνση: μετατόπιση κατά Δx
- Κίνηση υπό σταθερή δύναμη (Μοντέλο I) και κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση (Μοντέλο II):

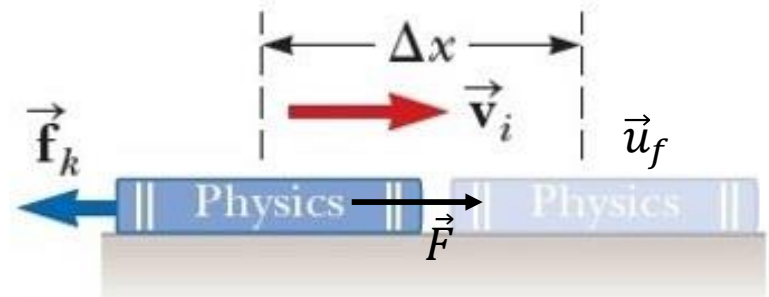
$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow F - f_k = ma$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{1}{2\Delta x} (u_f^2 - u_i^2)$$

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} \Rightarrow W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$

Ενέργεια Συστήματος

- Σύστημα == βιβλίο



$$W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$

- Πού πήγε η ενέργεια μέσω του έργου της $\vec{F}$??
- Μετατράπηκε τόσο σε αύξηση της **κινητικής ενέργειας** του σώματος όσο και σε **αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου**:

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -(-f_k \Delta x) = -W_{f_k}$$

- Μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος
βιβλίο + επιφάνεια

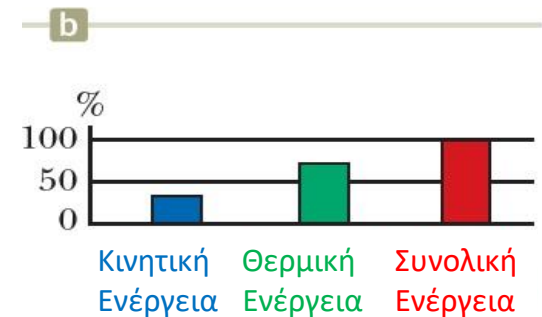
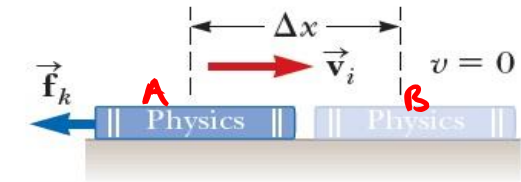
Ενέργεια Συστήματος

- Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε σε **θερμική ενέργεια** του συστήματος βιβλίο και επιφάνεια (όχι μόνο βιβλίο!)
 - Η επιφάνεια και το βιβλίο θερμάνθηκαν!
- Θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως **θερμική ενέργεια**, και θα τη συμβολίζουμε με

$$E_{th}$$

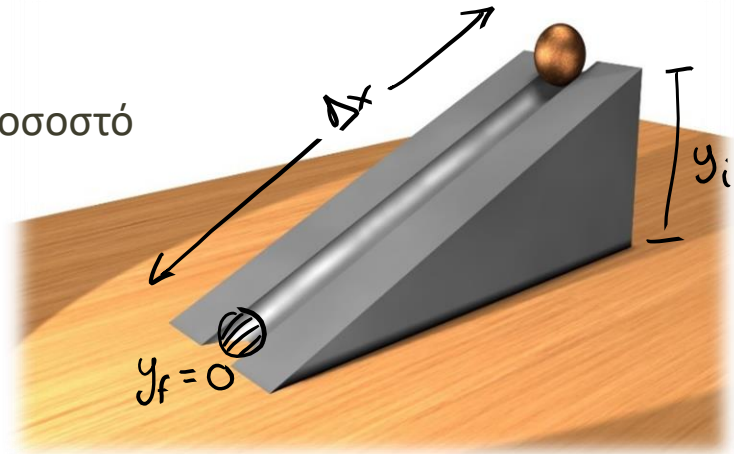
- Στο προηγούμενο παράδειγμα (και γενικότερα)

$$\Delta E_{th} = -W_{\tauριβης} = f_k \Delta x$$



Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε το διπλανό σύστημα: **μπάλα + επικλινές + έδαφος (Γη)**
Η απόσταση που μια μπάλα ολισθαίνει σε μια επικλινή επιφάνεια με τριβές, έχει μεγάλη σημασία για το **πόση** δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική
- Μεγαλύτερη απόσταση $\rightarrow$ μεγαλύτερο ποσοστό δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική λόγω του έργου της δύναμης τριβής
- Υπάρχει εξάρτηση από το «μονοπάτι»
- Αντίθετα, το έργο της δύναμης της βαρύτητας δεν εξαρτάται από το «μονοπάτι» που ακολουθεί το σώμα!



$$W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} = -mg\vec{j} \cdot (\cancel{y_f} - y_i)\vec{j} = mg y_i$$

$$W_{\text{τριβης}} = -f_k \Delta x$$

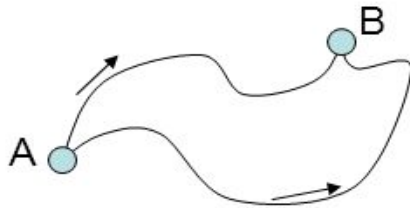
Ενέργεια Συστήματος

- Αυτή η εξάρτηση από τη διαδρομή («μονοπάτι») που ακολουθεί το σώμα ορίζει δυο κατηγορίες δυνάμεων:
 - **Συντηρητικές (*conservative*)**
 - Ανεξάρτητη από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη βαρύτητας
 - **Μη συντηρητικές (*nonconservative*)**
 - Εξάρτηση από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη τριβής ολίσθησης
- **Συντηρητικές δυνάμεις – Ιδιότητες:**
 1. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δυο σημεία είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ανάμεσα σε αυτά.
 2. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

Ενέργεια Συστήματος

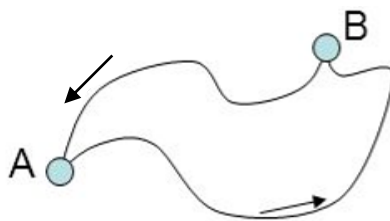
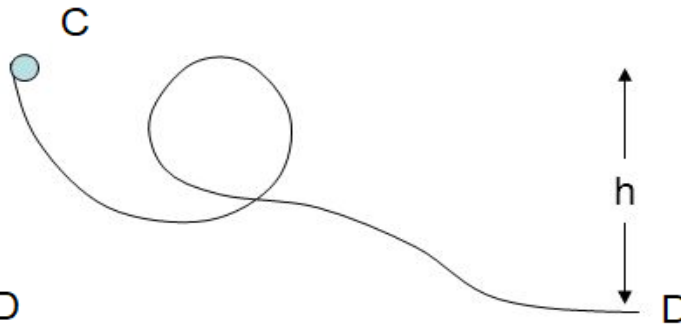
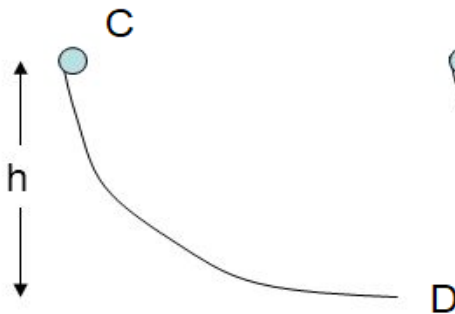
Συντηρητικές δυνάμεις - Ιδιότητες:

Έστω ότι οι κινήσεις μεταξύ των σημείων οφείλονται σε μια συντηρητική δύναμη



Το έργο που παράγεται στη διαδρομή από το A στο B είναι το ίδιο για κάθε μια από τις διαδρομές.

Όμοια και για τις διαδρομές από το C στο D.



Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης από το A στο B και ξανά μετά στο A είναι μηδέν (κλειστή διαδρομή)

Ενέργεια Συστήματος

- Μια δύναμη λέγεται **μη συντηρητική** αν δεν ικανοποιεί (τουλάχιστον μια από) τις ιδιότητες 1 και 2 που είδαμε πριν
 - Παράδειγμα: τριβή ολίσθησης
- Η δράση αποκλειστικά συντηρητικών δυνάμεων είναι μεγάλο πλεονέκτημα για ένα σύστημα, καθώς μπορεί να υποστηρίξει ένα συγκεκριμένο ενεργειακό θεώρημα
- Ορίζουμε το άθροισμα της κινητικής K και της δυναμικής ενέργειας U ενός συστήματος ως τη **μηχανική ενέργεια** του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Αποδεικνύεται πειραματικά ότι οι **μη συντηρητικές** δυνάμεις που δρουν σε ένα σύστημα **αλλάζουν** τη μηχανική ενέργεια του συστήματος! Αντίθετα, **οι συντηρητικές τη διατηρούν!**

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

μόνο αν στο σύστημα δρουν αποκλειστικά συντηρητικές δυνάμεις!

- Προφανώς για τον ορισμό δυναμικής ενέργειας απαιτείται πολυμελές σύστημα
- Ας επιστρέψουμε λοιπόν στη μελέτη συντηρητικών δυνάμεων...

Ενέργεια Συστήματος

- Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων

- Δύναμη Βαρύτητας $\vec{F}_g$

- $W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = mgy_i - mgy_f$
- Εξάρτηση μόνο από τα y_i, y_f
- $W_g = 0$, σε κλειστή διαδρομή ($y_i = y_f$)

- Δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_s$

- $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
- Εξάρτηση μόνο από τα x_i, x_f
- $W_s = 0$, σε κλειστή διαδρομή ($x_i = x_f$)

Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα:

- Ένα παιδί μάζας m ολισθαίνει από ακίνητη θέση σε μια νεροτσουλήθρα ύψους $h = 8.5 \text{ m}$. Υποθέστε ότι η νεροτσουλήθρα περιγράφει μια επιφάνεια χωρίς τριβές και βρείτε την ταχύτητα του παιδιού στο τέρμα της.

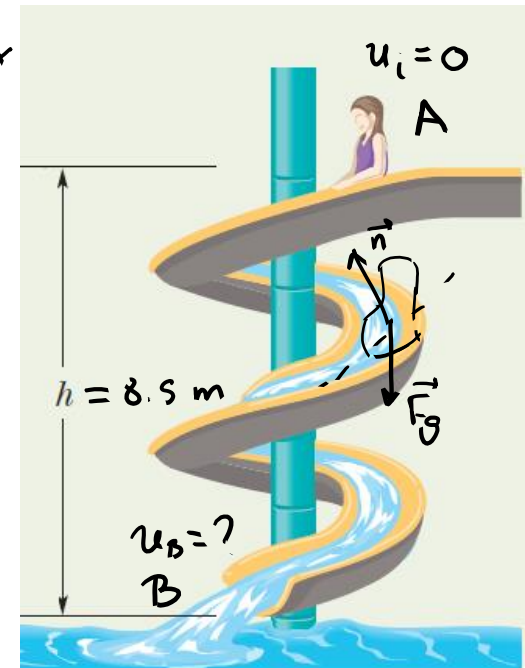
Θεωράμε ως σύστημα το παιδί, την τσαλίκρα και τη Γ_{η} .

Στο παιδί, ασκούνται δυο δυνάμεις:

1. Η $\vec{F}_g$ (του βάρους)

2. Η $\vec{n}$ ($W_n = 0$ γιατί $\vec{n} \perp \Delta\vec{x}$)

Η $\vec{F}_g$ είναι συντηρητική!



Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

Σταθισμός: $\Delta M E_{A \rightarrow B}$

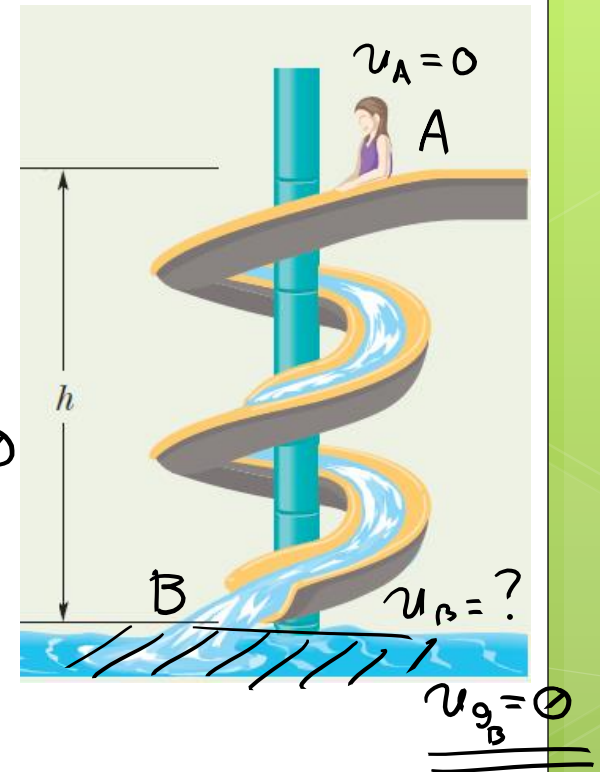
$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \Leftrightarrow \Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{g_{A \rightarrow B}} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} u_B^2 - 0 + 0 - \cancel{m} g h = 0$$

$$\frac{1}{2} u_B^2 = g h \Rightarrow u_B^2 = 2 g h \Rightarrow u_B = \pm \sqrt{2 g h}$$

$$\text{Άρα } |u_B| = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 8.5} \simeq 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα πολυμελές σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου μιας εσωτερικής συντηρητικής δύναμης, $W_{F,int}$
- Ένα σώμα από τα μέλη του κινείται από μια θέση i (αρχική) σε μια θέση f (τελική)
- Μεταβλήθηκε (έστω αυξήθηκε) η κινητική του ενέργεια
- Πρέπει ισόποσα να μεταβληθεί «αντίστροφα» (μειωθεί) η δυναμική του ενέργεια
 - ...λόγω Α.Δ.Μ.Ε!

$$W_{F,int} = \Delta K = -\Delta U = -(U_f - U_i) = U_i - U_f$$

Ενέργεια Συστήματος

- Το έργο $W_{F,int}$ που παράγεται από μια **εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα άλλο σώμα που είναι μέλος του συστήματος** ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας

- Π.χ. έργο **βάρους** κατά την ανύψωση βιβλίου στο σύστημα Γη-βιβλίο

$$W_{F_g} = -\Delta U_g$$

- Π.χ. έργο **δύναμης του ελατηρίου** κατά τη μετατόπιση του από τη θέση ισορροπίας στο σύστημα ελατήριο-σώμα

$$W_s = -\Delta U_s$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω λοιπόν ένα σύστημα από σώματα στο οποίο δρα μια **εσωτερική συντηρητική δύναμη** $\vec{F}_{int}$
- Έστω ότι αυτή η δύναμη προκαλεί αλλαγή της διάταξης του συστήματος λόγω της κίνησης ενός από τα σώματα επάνω στο $x'x$ άξονα
 - Έστω ότι η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα
- Το έργο της δύναμης αυτής θα είναι (ορισμός):

$$W_{F,int} = F_{int} \Delta x \cos \theta = F_x \Delta x = -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρώντας ότι η μετατόπιση του σώματος Δx είναι απειροστά μικρή, μπορούμε να πούμε ότι και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ΔU είναι απειροστά μικρή

$$\Delta U = -F_x \Delta x \Rightarrow F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Έτσι

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = -\int F_x dx + U_i$$

- Η συνάρτηση $U(x)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας**
- Η θέση x όπου $F_x = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας**
- Προφανώς ισχύει και

$$F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Ενέργεια Συστήματος

● Ευσταθής ισορροπία (stable equilibrium)

- Ένα σύστημα λέγεται ευσταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του
- Παραδείγματα: σύστημα σώματος-ελατηρίου, σύστημα μπίλιας-κυρτού μπώλ-Γης

● Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)

- Ένα σύστημα λέγεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του
- Παραδείγματα: σύστημα μολυβιού-Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια, σύστημα μπάλας-Γης στην κορυφή ενός λόφου

● Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)

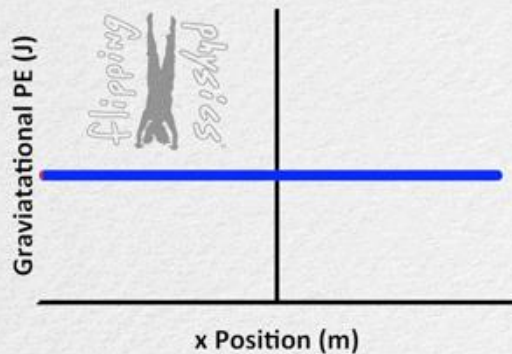
- Ένα σύστημα λέγεται ουδέτερης ισορροπίας αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέφει πίσω στην αρχική του θέση
- Παράδειγμα: σύστημα μπάλας-οριζόντιου εδάφους, σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου-οριζόντιου εδάφους

Ενέργεια Συστήματος

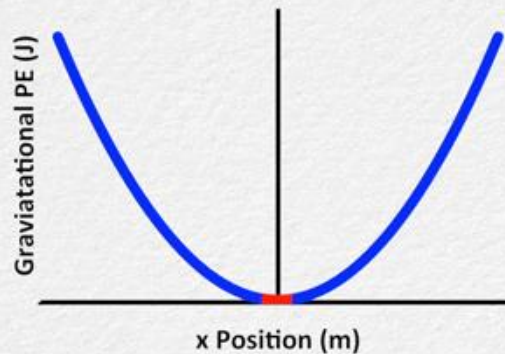
Equilibrium



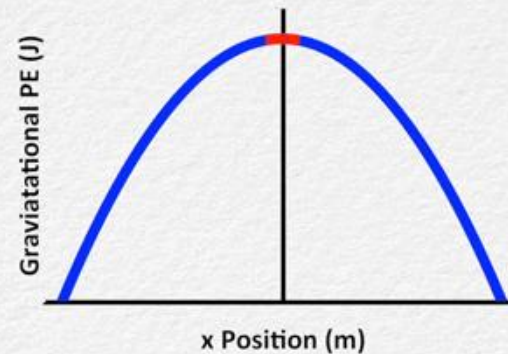
Neutral



Stable



Unstable





Συνεχίζεται... 😊
